На правах рукописи

УДК 515.124.4 + 514.774.8

Сосов Евгений Николаевич

ГЕОМЕТРИИ ВЫПУКЛЫХ И КОНЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ ГЕОДЕЗИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

01.01.04 — геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

КАЗАНЬ — 2010

Работа выполнена на кафедре «Геометрия» ФГАОУВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор **Валерий Николаевич Берестовский**;

доктор физико-математических наук,
профессор **Сергей Евгеньевич Степанов**;

доктор физико-математических наук,
профессор **Евгений Иванович Яковлев**.

Ведущая организация — ФГОУВПО "Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова".

Защита состоится 5 ноября 2010 г. в 14 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 в ФГАОУВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» по адресу: г. Казань, ул. Профессора Нужина, 1/37, ауд. 324.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке ФГАОУВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

Автореферат разослан «_____» сентября 2010 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандидат физико-
математических наук Е. К. Липачев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ.

Актуальность темы исследования. Метрическая геометрия возникла в 20–30-е годы двадцатого века в работах К. Менгера, П. С. Урысона, А. Вальда, С. Э. Кон-Фоссена, К. Куратовского, Ф. Хаусдорфа, И. Шёнберга и других математиков. В этот начальный период метрическая геометрия еще не приобрела известность, а сам термин «метрическая геометрия» имел более узкий смысл. В 40–60-е годы были созданы основы метрической геометрии в фундаментальных работах Г. Буземана, А. Д. Александрова, В. А. Ефремовича, Л. М. Блюменталя, В. А. Залгаллера, Ю. Г. Решетняка, Ю. Д. Бураго и их учеников. С 70х годов начался современный этап развития метрической геометрии, достижения которого отражены в монографиях Г. Буземана [23]; Г. Буземана, B. B. Phadke [24]; М. Л. Громова [34]; А. В. Погорелова [55]; W. Ballmann [8]; A. Papadopoulos [53]; M. Bridson, A. Haefliger [19]; С. В. Буяло, В. Шрёдер [27]; М. М. Деза, М. Лоран [36]; в первом учебнике на русском языке Ю. Д. Бураго, Д. Ю. Бураго, С. В Иванова [25]; в обзорах Ю. Г. Решетняка [57]; В. Н. Берестовского, И. Г. Николаева [15] и некоторых других обзорах и монографиях. Кроме того, большое количество новых результатов пока не описано в обзорах, монографиях и учебниках, они содержатся лишь в научных статьях, число которых стабильно растет. В настоящее время установилось много взаимосвязей метрической геометрии с комбинаторной геометрией, геометрией близости [40], римановой геометрией «в целом» [26], теорией гиперболических групп, теорией фракталов, геометрической теорией меры [64], нелинейным функциональным анализом, субдифференциальным исчислением [41], выпуклым анализом [56, 54], теорией некорректных задач, теорией вероятностей, теорией графов [36], теорией приближений [61, 59] и другими разделами математики [37]. Эти взаимосвязи поддерживают актуальность метрической геометрии и постоянный приток в нее новых задач. Кроме того, развитие метрической геометрии связано с важностью и распространенностью метрических свойств объектов, исследуемых в различных разделах математики и прикладных науках, а также с тем, что по мере накопления геометрических фактов, полученных другими методами (например, методами математического анализа), проясняется метрическая природа многих из них.

Г. Буземан метризовал группу всех движений метрического пространства и доказал, что в случае конечной компактности метрического пространства (сейчас чаще употребляются термины: собственное метрическое пространство [19, с. 2] или ограниченно-компактное метрическое пространство [25, с. 17]) эта группа является конечно-компактным метрическим пространством [22, с. 30, 32]. В. Н. Берестовским было доказано, что метрическая топология Буземана в группе всех движений конечно-компактного метрического пространства эквивалентна ее компактно-открытой топологии и группа всех движений однородного G-пространства Буземана является группой Ли [14, 13]. Для группы подобий аналогичные исследования проведены в [18], [35] и в статье автора (2).

Известно, что одним из условий в определениях G-пространства Буземана [22, с. 54] и хордового пространства [24, с. 23] является условие конечной компактности метрического пространства. Актуальной задачей является ослабление условия конечной компактности метрического пространства, поскольку оно исключает из исследования многие геометрические объекты гильбертовых многообразий (в частности, гильбертовых пространств) и бесконечномерных банаховых многообразий, а также ограничивает общность исследования наилучших аппроксимирующих множеств (например, чебышевских центров или наилучших N-сетей) ограниченных множеств, возникающих при решении геометрических задач или задач теории приближений. На этом пути были исследованы некоторые свойства выпуклых множеств в обобщенно хордовом пространстве (обобщенном G-пространстве Буземана) (4, 6), обобщающие соответствующие свойства выпуклых множеств в хордовом пространстве (G-пространстве Буземана) [24, с. 65, 74, 75, 79, 80-82], [22, с. 154, 157, 160]. В более общей ситуации (то есть при отсутствии собственности метрического пространства) были использованы условие неположительности кривизны по Буземану и понятие дифференцируемого пространства по Буземану в точке, что позволило обобщить и начать исследование касательного пространства по Буземану в точке геодезического пространства (15). Другие подходы проработаны более глубоко и основаны на понятиях конуса над пространством направлений [1], касательного конуса по Громову–Хаусдорфу [25, с. 328] и их модификаций с использованием дифферецируемости в метрическом пространстве, ультрасходимости метрических пространств и отображений [47]. Известно, что некоторые метрические свойства (например, аппроксимативные свойства) множеств в равномерно выпуклом банаховом пространстве связаны со свойствами метрической или обобщенной метрической проекции на эти множества. Эти свойства исследовались Б. Секефальви–Надь [20, теорема 3.35], Ю. А. Брудным, Е. А. Горином [20], С. Б. Стечкиным, Н. В. Ефимовым, Л. П. Власовым (см. обзор [30]), А. В. Мариновым [48, 49, 50], I. Singer [60] и другими математиками. Обобщенная метрическая проекция имеет также важное значение для исследования ε-квазирешений и квазирешений операторных уравнений первого рода [48, 45, 46]. Оказалось, что многие из таких свойств допускают обобщение на геодезические пространства, удовлетворяющие дополнительным условиям, обеспечивающим в совокупности аналог свойства равномерной выпуклости банахова пространства (7, 9, 10). Аналог равномерной выпуклости в геодезическом пространстве дает возможность получить достаточные условия существования и единственности чебышевского центра ограниченного множества и исследовать геометрические свойства наилучших N-сетей ограниченных множеств. В банаховых и гильбертовых пространствах свойства чебышевских центров и наилучших N-сетей ограниченных множеств исследовали А. Л. Гаркави [32, 33], П. К. Белобров [10, 11], D. Amir, J. Mach,

K. Saatkamp [2, 3], L. Vesely [29], A. Wisnicki и J. Wosko [63], В. С. Балаганский [9]. В метрическом пространстве свойства чебышевского центра ограниченного множества исследовались при более сильных ограничениях на пространство [52, 28], [8, с. 26]. Аналогично ситуации с чебышевским центром, некоторые результаты С. И. Дудова и И. В. Златорунской [38, 39] о наилучшем приближении в метрике Хаусдорфа выпуклого компакта банахова пространства шаром допускают обобщение на случай специального геодезического пространства неположительной кривизны по Буземану (14).

Таким образом, важность установления новых связей метрической геометрии с теорией приближений, выпуклым анализом и функциональным анализом делает тему диссертации актуальной. Кроме того, есть много внутренних нерешенных проблем метрической геометрии. Например, проблема Буземана о том, является ли G-пространство Буземана топологическим многообразием [22, с. 69]. Г. Буземан [21], B. Krakus [43] и P. Thurston [62] доказали, что G-пространство Буземана является топологическим многообразием в размерностях 2, 3 и 4 соответственно. В. Н. Берестовский установил некоторые достаточные условия конечномерности G-пространства Буземана [12]. В общем случае проблема остается открытой.

В данной работе при исследовании геометрических свойств пространств выпуклых (конечных) множеств метрического пространства используются в основном прямые, синтетические методы Буземана [22, 23, 24, 42, 53, 17, 13, 16, 5, 6, 7, 4], стандартные методы теории метрических пространств [44, 51] и методы теории приближений [61, 20, 30, 32, 38, 48, 49, 50]. Треугольники сравнения и верхние углы по А. Д. Александрову [15] используются для исследования одного метрического аналога слабой сходимости последовательности в вещественном гильбертовом пространстве.

Целью настоящей работы является исследование геометрии выпуклых (конечных) множеств геодезического пространства.

Научная новизна исследования. Все основные результаты, представленные в настоящей работе и выносимые на защиту, являются новыми.

Объектом исследования настоящей работы являются проблемы геометрии выпуклых (конечных) множеств геодезического пространства.

Основные результаты диссертационной работы, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие результаты.

1. Найдены необходимые и достаточные условия, при которых пространства (X_N, α_p), $(\Sigma_2(X), \alpha)$ являются пространствами с внутренней метрикой, а также метрически выпуклыми (выпуклыми по Менгеру, собственными, геодезическими) пространствами. Получены достаточные условия, при которых пространство (X_N^*, α_p) является геодезическим пространством (удовлетворяет локальному условию неположительности кривизны по Буземану). Найдены необходимые и достаточные условия, при которых пространство $(\Sigma_N(X), \alpha_{p,R})$ является пространством с внутренней метрикой, а также собственным (собственным метрически выпуклым, собственным выпуклым по Менгеру, собственным геодезическим) пространством.

2. Установлено, что одулярные структуры прямого G-пространства Буземана и геометрии Гильберта являются топологическими одулярными структурами. Исследованы геометрические свойства выпуклых U-множеств обобщенного хордового пространства.

3. Получены оценки изменения относительного чебышевского радиуса $R_W(M)$ при изменении непустых ограниченных множеств M, W метрического пространства. Найдены замыкание и внутренность множества всех N-сетей, каждая из которых обладает принадлежащим ей единственным относительным чебышевским центром, в множестве всех N-сетей специального геодезического пространства относительно метрики Хаусдорфа. Получены достаточные условия существования и единственности чебышевского центра, а также принадлежности чебышев-

ского центра замыканию выпуклой оболочки непустого ограниченного множества специального геодезического пространства.
4. Теоремы Б. Секефальви - Надь, С. Б. Стечкина и Н. В. Ефимова об аппроксимативных свойствах множеств, а также теоремы Л. П. Власова и А. В. Маринова о непрерывности и связности метрической δ-проекции в равномерно выпуклом банаховом пространстве обобщены на случай специального геодезического пространства. В специальном метрическом пространстве получены обобщения теорем П. К. Белоброва и А. Л. Гаркави о наилучших N-сетях непустых ограниченных замкнутых выпуклых множеств в гильбертовом и в специальном банаховом пространствах. Для каждого непустого ограниченного множества бесконечномерного пространства Лобачевского доказано существование наилучшей N-сети и наилучшего N-сечения, а также установлена сильная устойчивость чебышевского центра.
5. Получена оценка сверху для расстояния Хаусдорфа от непустого ограниченного множества до множества всех замкнутых шаров специального геодезического пространства X неположительной кривизны по Буземану. Доказано, что множество всех центров $\chi(M)$ замкнутых шаров, наилучшим образом приближающих в метрике Хаусдорфа выпуклый компакт $M \subset X$, непустое и принадлежит M.
6. Установлено, что метрика на касательном пространстве в произвольной точке пространства неположительной кривизны по Буземану (дифференцируемого по Буземану метрического пространства) внутренняя. Доказано, что касательное пространство в произвольной точке локально полного дифференцируемого по Буземану метрического пространства является полным пространством, а также, что касательное пространство в произвольной точке локально компактного пространства неположительной кривизны по Буземану является собственным геодезическим пространством.
7. Доказано, что пространство всех слабо ограниченных гомеоморфизмов с метрикой Куратовского, каждый из которых равномерно непре-

рывен на произвольном замкнутом шаре с центром в фиксированной точке метрического пространства вместе со своим обратным гомеоморфизмом, является паратопологической группой (топологической группой при связности произвольного замкнутого шара с центром в данной фиксированной точке), непрерывно действующей на метрическом пространстве X. Теорема Банаха об обратном операторе и принцип равностепенной непрерывности для F-пространств обобщены на случай специального геодезического отображения специальных геодезических пространств.

8. Доказано, что пространство $(H_B(X, Y, \alpha), \delta_p)$ всех отображений из метрического пространства X в метрическое пространство Y, удовлетворяющих равномерному условию Гельдера с фиксированными показателем и коэффициентом, является полным (собственным) метрическим пространством, если Y — полное метрическое пространство (X, Y — собственные метрические пространства). Установлено, что если X — собственное метрическое пространство, то топология пространства $(H_B(X, Y, \alpha), \delta_p)$ совпадает как с топологией поточечной сходимости, так и с компактно-открытой топологией. В специальном метрическом пространстве введены два аналога слабой сходимости последовательности в вещественном гильбертовом пространстве и исследованы их геометрические свойства.

9. Доказано, что:

– если X, Y — полные (собственные) метрические пространства, то пространство $Sim(X, Y) \cup Const(X, Y)$, состоящее из всех подобий и всех постоянных отображений из X в Y, с метрикой Буземана δ_p является полным (собственным);

– если X — собственное метрическое пространство, то топология пространства $(Sim(X, Y) \cup Const(X, Y), \delta_p)$ совпадает как с топологией поточечной сходимости, так и с компактно-открытой топологией;

– $(Sim(X), \delta_p)$ — топологическая группа, действующая непрерывно на пространстве X;

– группы подобий $Sim(X)$ и изометрий $Iso(X)$ с метрикой Куратовского δ являются топологическими группами, непрерывно действующими на пространстве X. Найдено замыкание группы подобий полного метрического пространства в объемлющем пространстве отображений $\Phi(X, X)$ с метрикой Буземана δ_p.

Методы исследования. Основными методами исследования, применяемыми в настоящей работе, являются:
– синтетические, прямые методы Буземана;
– стандартные методы из теории метрических пространств;
– методы теории приближений.

Достоверность полученных в диссертации результатов обусловлена тем, что:
– применяются проверенные, точные и строго обоснованные методы исследования;
– многие результаты диссертации являются обобщением полученных ранее результатов и совпадают с этими результатами в частных случаях;
– все основные результаты диссертации доказаны и опубликованы.

Теоретическое и прикладное значение исследования. Результаты, полученные в диссертации, носят теоретический характер. Они могут быть использованы для дальнейших исследований метрической геометрии, геометрии Лобачевского, теории приближений и функционального анализа. Результаты диссертации были использованы соискателем при чтении специальных курсов для студентов Казанского (Приволжского) федерального университета. Исследования автора по геометрии выпуклых (конечных) множеств геодезического пространства частично финансировались Российским Фондом Фундаментальных Исследований (грант № 00-01-00308).

Апробация работы. Основные результаты диссертации были представлены на следующих семинарах и конференциях:
– ежегодно на научных семинарах кафедры «Геометрия» Казанского

государственного университета в 1993-2009 г.г.;
– на итоговых научных конференциях Казанского педагогического университета в 1994-2000 г.г.;
– на итоговых научных конференциях Казанского государственного университета в 2001-2009 г.г.;
– на научных семинарах НИИ математики и механики им. Н. Г. Чеботарева (Казань, 2001-2007 г.г.);
– на международном геометрическом семинаре имени Н. И. Лобачевского «Современная геометрия и теория физических полей» (Казань, 4-6 февраля 1997 г.);
– на международной научной конференции «Актуальные проблемы математики и механики» в НИИ математики и механики им. Н. Г. Чеботарева (Казань, 1-3 октября 2000 г.);
– на международной научной конференции «Topology, Analysis and Related Topics», посвященной шестидесятилетию А. С. Мищенко (Московский гос. ун-т, 29-31 августа 2001 г.);
– на международной научной конференции «Геометрия «в целом», топология и их приложения», посвященной девяностолетию со дня рождения А. В. Погорелова (Харьковский национальный ун-т, 22-27 июня 2009 г.);
– на Восьмой научной школе-конференции «Лобачевские чтения 2009» (Казань, 1-6 ноября 2009 г.);
– на научном семинаре кафедры «Дифференциальная геометрия и приложения» Московского государственного университета (Москва, 14 декабря 2009 г.);
– на геометрическом семинаре им. А. Д. Александрова Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН (Санкт-Петербург, 4 марта 2010 г.).

Публикации и вклад автора в разработку исследованных проблем. Основные результаты, изложенные в диссертации, опубликованы в 21 публикации, общим объемом 6,95 печатных листов. Семнадцать из них опубликованы в журналах, определенных Высшей аттестационной комиссией (ВАК) Министерства образования и науки Российской Федерации для публикации результатов научных исследований. Все основные результаты диссертации опубликованы автором без соавторов.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка цитируемой литературы. Нумерация параграфов производится двумя символами, а нумерация результатов производится тремя символами. Например, теорема 1.2.3 обозначает теорему 3 из второго параграфа главы 1. Библиографический список состоит из 21 наименований работ автора и 84 наименований других авторов. Полный объем диссертации составляет 256 страниц машинописного текста.

Краткое описание содержания работы по главам.

Во введении обоснована актуальность темы исследования, дана общая характеристика работы и приведено краткое содержание работы.

В первой главе диссертации исследуются геометрические свойства выпуклых и конечных множеств в геодезическом пространстве.

В параграфе 1.1 рассматривается внутренняя метрика Хаусдорфа. Доказано, что метрика Хаусдорфа на множестве всех непустых замкнутых ограниченных подмножеств метрического пространства (X, ρ) является внутренней метрикой тогда и только тогда, когда метрика ρ — внутренняя (теорема 1.1.1). Установлено, что пространство (X, ρ) — метрически выпукло тогда и только тогда, когда для любых двух ограниченных множеств существования пространства X найдется середина этих множеств относительно метрики Хаусдорфа. Указано, как построить такую середину в метрически выпуклом пространстве (теорема 1.1.2). В метрическом пространстве с внутренней метрикой получена верхняя оценка для хаусдорфова расстояния между обобщенными шарами (лемма 1.1.2).

В параграфе 1.2 при заданном метрическом пространстве (X, ρ) рассматриваются множество всех N-сетей $\Sigma_N(X)$ пространства X, его подмножество $\Sigma_N^*(X)$, элементами которого служат произвольные N-сети мощности N, симметризованная степень X_N порядка N пространства X, отождествленная с множеством всех N-сетей с повторениями, и его подмножество X_N^*, равномощное множеству $\Sigma_N^*(X)$. Пусть $p \in [1, \infty]$. Множество X_N наделим метрикой α_p :

$$\alpha_p([(x_1, \ldots, x_N)], [(y_1, \ldots, y_N)]) =$$

$$\min\{\rho_{N,p}((x_1, \ldots, x_N), (y_{\sigma(1)}, \ldots, y_{\sigma(N)})) : \sigma \in S(N)\},$$

где $S(N)$ — группа всех подстановок множества из $N \geq 1$ элементов,

$$\rho_{N,p}((x_1, \ldots, x_N), (y_1, \ldots, y_N)) = (|x_1y_1|^p + \ldots + |x_Ny_N|^p)^{1/p}$$

при $p \in [1, \infty)$ и

$$\rho_{N,\infty}((x_1, \ldots, x_N), (y_1, \ldots, y_N)) = \max\{|x_1y_1|, \ldots, |x_Ny_N|\}$$

при $p = \infty$. Рассмотрим на множестве X_N следующее отношение эквивалентности R:

$$[(x_1, \ldots, x_N)]R[(y_1, \ldots, y_N)], \text{ если } \quad \{x_1, \ldots, x_N\} = \{y_1, \ldots, y_N\}.$$

Множество $\Sigma_N(X)$ отождествим с фактор-пространством X_N/R и наделим его фактор-метрикой $\alpha_{p,R}$ или метрикой Хаусдорфа α.

Доказано, что пространства (X_N, α_p), $(\Sigma_2(X), \alpha)$ являются пространствами с внутренней метрикой или метрически выпуклыми (выпуклыми по Менгеру, собственными, геодезическими) пространствами тогда и только тогда, когда соответствующими свойствами обладает пространство (X, ρ) (теорема 1.2.1, следствие 1.2.1). Получены достаточные условия, при которых пространство (X_N^*, α_p) является геодезическим пространством или удовлетворяет локальному условию неположительности кривизны по Буземану (теорема 1.2.2). Доказано, что пространство $(\Sigma_N(X), \alpha_{p,R})$ является пространством с внутренней метрикой или собственным (собственным метрически выпуклым, собственным выпуклым по Менгеру, собственным геодезическим) пространством тогда и только тогда, когда соответствующими свойствами обладает пространство (X, ρ) (теорема 1.2.3). Для собственного геодезического пространства (X, ρ) получены достаточные условия, при которых произвольные две N-сети пространства $(\Sigma_N(X), \alpha)$ могут быть соединены сегментом (следствие 1.2.4). В метрически выпуклом пространстве, удовлетворяющем глобальному условию неположительности кривизны по Буземану, найдены геометрическое свойство отображения, сопоставляющее произвольному сегменту его середину (лемма 1.2.1), и некоторые геометрические свойства пространства $(\Sigma_2(X), \alpha)$, связанные в основном со свойством метрической выпуклости этого пространства (лемма 1.2.2).

В параграфе 1.3 исследуются геометрические свойства выпуклых множеств в обобщенном хордовом пространстве. Введено понятие обобщенного хордового пространства (обобщенного G-пространства Буземана). Получены достаточные условия выпуклости замыкания (внутренности) выпуклого U-множества обобщенного хордового пространства, а также совпадения замыкания (внутренности) выпуклого U-множества с замыканием внутренности (внутренностью замыкания внутренности) этого множества (теорема 1.3.1). Найдены условия, эквивалентные условию выпуклости всех замкнутых шаров в обобщенном хордовом пространстве, являющимся U-множеством, а также в обобщенном G-пространстве Буземана (теоремы 1.3.2, 1.3.3). Установлены достаточные условия, при которых обобщенное хордовое пространство является обобщенным G-пространством Буземана (теорема 1.3.4). Геометрически охарактеризовано множество всех точек на всех опорных (полукасательных) хордах в произвольной граничной точке выпуклого множества из открытого шара обобщенного хордового пространства (теорема 1.3.5). Получены геометрические характеристики для трансверсалей произвольной прямой обобщенного прямого хордового пространства, все открытые шары которого выпуклы (теорема 1.3.6).

В параграфе 1.4 исследуются одулярные структуры геометрии Гильберта и прямого G-пространства Буземана. Получены достаточные условия, при которых одулярная структура геодезического пространства, через каждые две различные точки которого можно провести единственную прямую, является топологической одулярной структурой (лемма 1.4.1). Установлено, что одулярные структуры прямого G-пространства Буземана и геометрии Гильберта являются топологическими одулярными структурами (теоремы 1.4.1$'$, 1.4.3). Доказано, что метрика геометрии Гильберта в открытом шаре B строго выпуклого банахова пространства топологически эквивалентна индуцированной метрике в B банахова пространства, а также, что эти метрики липшицево эквивалентены на каждом замкнутом шаре, содержащимся в B (теорема 1.4.2). Получен явный вид для основных операций одулярной структуры геометрии Гильберта (лемма 1.4.2). Вычислены некоторые пределы функций, связанных с основными операциями одулярной структуры геометрии Лобачевского (теорема 1.4.4).

Основные результаты по перечисленным темам опубликованы в статьях автора (3, 4, 6, 11, 13, 20, 21).

Во второй главе диссертации исследуются аппроксимативные свойства множеств в геодезическом пространстве.

В параграфе 2.1 рассматриваются относительные чебышевский центр, чебышевский радиус и множество всех диаметральных точек ограниченного множества метрического пространства.

Пусть в метрическом пространстве (X,ρ) фиксировано некоторое семейство непустых множеств Σ. Множество $S^* \in \Sigma$ называется *наилучшим аппроксимирующим множеством* из семейства Σ для непустого ограниченного множества M [61, с. 15], если

$$\beta(M,S^*) = R_\Sigma(M), \text{ где } R_\Sigma(M) = \inf\{\beta(M,S) : S \in \Sigma\},$$

$\beta(M,W) = \sup\{|xW| : x \in M\}$ — *отклонение* множества M от непустого множества $W \subset X$ [44, с. 223], $|xy| = \rho(x,y)$ для x, $y \in X$.

Относительным чебышевским радиусом непустого ограниченного *множества* $M \subset X$ по отношению к непустому множеству $W \subset X$ называется число [63]

$$R_W(M) = \inf\{\beta(M,x) : x \in W\},$$

а множество $Z_W(M) = \{x \in W : \beta(M,x) = R_W(M)\}$ называется *множеством всех относительных чебышевских центров множества* M по отношению к множеству W [2].
$R(M) = R_X(M)$ $(Z(M) = Z_X(M))$ — *чебышевский радиус* (*множество всех чебышевских центров*) непустого ограниченного множества M.

В следующей теореме получены оценки изменения относительного чебышевского радиуса $R_W(M)$ при изменении непустых ограниченных множеств M, W метрического пространства.

Теорема 2.1.1 *Пусть* X *— метрическое пространство,* M, W, A, B *— непустые ограниченные множества в* X. *Тогда верны следующие утверждения.*

(i) $|R_W(M) - R_B(A)| \leq \max\{\beta(M,A) + \beta(B,W), \beta(A,M) + \beta(W,B)\}$.

(ii)
$$R_W(M) \leq R(M) + |Z(M)W|$$

при $Z(M) \neq \oslash$. *В частном случае, когда* X *— банахово пространство, это неравенство известно* [63].

(iii)
$$R_W(M) \leq R_M(M) + |Z_M(M)W|$$

при $Z_M(M) \neq \oslash$.

(iv)
$$|R_\Sigma(M) - R_\Sigma(W)| \leq \alpha(M,W),$$

где $\alpha(M,W) = \max\{\beta(M,W), \beta(W,M)\}$ *— расстояние Хаусдорфа между множествами* M, W.

Доказано, что из всякой последовательности компактных множеств метрического пространства, сходящейся относительно метрики Хаусдорфа к некоторому компактному множеству M, можно выбрать подпоследовательность, для которой последовательность множеств всех относительных чебышевских центров (всех диаметральных точек) ее элементов сходится относительно отклонения Хаусдорфа к множеству всех относительных чебышевских центров (всех диаметральных точек) множества M (теорема 2.1.2).

В параграфе 2.2 найдены замыкание и внутренность множества всех N-сетей, каждая из которых обладает принадлежащим ей единственным относительным чебышевским центром, в множестве всех N-сетей специального геодезического пространства относительно метрики Хаусдорфа (теорема 2.2.1). Доказано, что относительно метрики Хаусдорфа при $N > 2$ граница множества всех N-сетей, каждая из которых обладает не более, чем $N - 2$ принадлежащими ей относительными чебышевскими центрами, совпадает с множеством всех диаметральных N-сетей в множестве всех N-сетей специального геодезического пространства (следствие 2.2.1).

В параграфе 2.3 получены достаточные условия существования и единственности чебышевского центра непустого ограниченного множества геодезического пространства.

Перечислим отдельно условия, некоторые из которых будем налагать на метрическое пространство (X, ρ).

(A_4) Для любых x, $y \in X$ существует единственная точка $\omega(x, y) \in X$ такая, что

$$|x\omega(x, y)| = |y\omega(x, y)| = \frac{1}{2}|xy|.$$

(A_5) Для всех точек p, x, y пространства X, удовлетворяющего условию (A_4), верно неравенство

$$|p\omega(x, y)| \leq \max\{|px|, |py|\}.$$

(A_6) Отображение $\omega : X \times X \to X$ равномерно непрерывно на каждом множестве $B \times B$, где B — произвольный замкнутый шар пространства X, удовлетворяющего условию (A_4).

(A_7) Для каждого $r > 0$ и для любых ограниченных последовательностей

$$(p_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

пространства X, удовлетворяющего условию (A_4), таких, что для каждого $n \in \mathbb{N}$

$$|p_n x_n| \leq r, \quad |p_n y_n| \leq r, \quad \lim_{n\to\infty} |p_n \omega(x_n, y_n)| = r,$$

верно равенство $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n y_n| = 0$.

(A_8) Для каждого $r > 0$, для каждой сходящейся к нулю последовательности неотрицательных вещественных чисел $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и для любых ограниченных последовательностей

$$(p_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

пространства X, удовлетворяющего условию (A_4), таких, что для каждого $n \in \mathbb{N}$

$$|p_n x_n| \leq r + \varepsilon_n, \quad |p_n y_n| \leq r + \varepsilon_n, \quad \lim_{n\to\infty} |p_n \omega(x_n, y_n)| = r,$$

верно равенство $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n y_n| = 0$.

Примерами полных метрических пространств, в которых выполнены условия $(A_4 - A_8)$, являются равномерно выпуклое банахово пространство и пространство Адамара [25, с. 390] (в частности, гильбертово пространство и пространство Лобачевского). Сформулируем теперь полученные результаты.

Лемма 2.3.1. *Если геодезическое пространство X удовлетворяет условиям $(A_4 - A_7)$, то оно удовлетворяет и условию (A_8).*

Лемма 2.3.2 *Для каждого непустого ограниченного множества метрического пространства, удовлетворяющего условиям $(A_4 - A_6)$, существует не более одного чебышевского центра.*

Теорема 2.3.1 *Для каждого непустого ограниченного множества полного метрического пространства, удовлетворяющего условиям (A_4), (A_5), (A_6), (A_8), существует единственный чебышевский центр.*

Из леммы 2.3.1 и теоремы 2.3.1 следует

Следствие 2.3.1 *Для каждого непустого ограниченного множества полного метрического пространства, удовлетворяющего условиям* $(A_4 - A_7)$, *существует единственный чебышевский центр.*

В параграфе 2.4 теоремы Б. Секефальви - Надь [20, теорема 3.35], С. Б. Стечкина и Н. В. Ефимова [30, теоремы 1.1 и 1.2] об аппроксимативных свойствах множеств в равномерно выпуклом банаховом пространстве обобщены на случай специального геодезического пространства (теоремы 2.4.1, 2.4.2, 2.4.3).

Вместе с условиями $(A_4 - A_6)$ на геодезическое пространство X будем использовать также вместо условия (A_7) более слабое условие (A_7').

(A_7') Для каждого замкнутого шара $B[p, r]$ геодезического пространства X, удовлетворяющего условию (A_4), и для любых последовательностей $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ из этого шара таких, что
$\lim\limits_{n\to\infty} |p\omega(x_n, y_n)| = r$, верно равенство $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n y_n| = 0$.

Приведем формулировку теоремы, которая есть обобщение теоремы Б. Секефальви - Надь [20, теорема 3.35].

Теорема 2.4.1. *В полном геодезическом пространстве, удовлетворяющем условиям* $(A_4 - A_6)$, (A_7'), *каждое выпуклое замкнутое множество является аппроксимативно компактным, чебышевским (а значит и сильно чебышевским).*

В параграфе 2.5 теоремы Л. П. Власова [31, 30] и А. В. Маринова [49] о непрерывности и связности метрической δ-проекции в равномерно выпуклом банаховом пространстве обобщены на случай специального геодезического пространства (теоремы 2.5.1 – 2.5.4). Одним из простых следствий такого обобщения является справедливость аналогичных результатов в пространствах Лобачевского (включая бесконечномерные).

В параграфе 2.6 доказано, что теоремы А. В. Маринова из [48, 50] о непрерывности метрической δ-проекции на выпуклое множество в линейном нормированном пространстве остаются верными в специальном метрическом пространстве (теоремы 2.6.1, 2.6.2).

В параграфе 2.7 в специальном метрическом пространстве получены обобщения некоторых результатов П. К. Белоброва [10, 11] и А. Л. Гаркави [33] о наилучших N-сетях непустых ограниченных замкнутых выпуклых множеств в гильбертовом и в специальном банаховом пространствах (теоремы 2.7.1, следствие 2.7.2), а также о принадлежности чебышевского центра замыканию выпуклой оболочки данного множества (лемма 2.7.2).

В параграфе 2.8 доказано, что некоторые результаты А. Л. Гаркави [32, 33] и П. К. Белоброва [11, 10] о наилучшей сети, наилучшем сечении и чебышевском центре ограниченного множества в специальном банаховом пространстве верны и в бесконечномерном пространстве Лобачевского. А именно, для каждого непустого ограниченного множества бесконечномерного пространства Лобачевского доказано существование наилучшей N-сети (теорема 2.8.1) и наилучшего N-сечения (теорема 2.8.2), а также установлена сильная устойчивость чебышевского центра (теорема 2.8.3).

В параграфе 2.9 рассматривается наилучшее приближение выпуклого компакта геодезического пространства шаром. Получена оценка сверху для расстояния Хаусдорфа от непустого ограниченного множества до множества всех замкнутых шаров специального геодезического пространства X неположительной кривизны по Буземану (теорема 2.9.1). Доказано, что множество всех центров $\chi(M)$ замкнутых шаров, наилучшим образом приближающих в метрике Хаусдорфа выпуклый компакт $M \subset X$, непустое и принадлежит M (теорема 2.9.2). Исследованы геометрические свойства множества $\chi(M)$. Таким образом, теоремы С. И. Дудова и И. В. Златорунской [38, 39] обобщены на случай специального геодезического пространства неположительной кривизны по Буземану.

В параграфе 2.10 исследуются метрические свойства касательного пространства для метрического пространства более общего, чем дифференцируемое G-пространство Буземана. Установлено, что метрика на касательном пространстве в произвольной точке пространства неположительной кривизны по Буземану (дифференцируемого по Буземану метрического пространства) внутренняя. Доказано, что касательное пространство в произвольной точке локально полного дифференцируемого по Буземану метрического пространства является полным пространством, а также, что касательное пространство в произвольной точке локально компактного пространства неположительной кривизны по Буземану является собственным геодезическим пространством (теоремы 2.10.1, 2.10.2).

Основные результаты по перечисленным темам этой главы опубликованы в статьях автора (7, 8, 9, 10, 11, 14, 15, 16, 17, 18).

В третьей главе исследуются специальные отображения метрических пространств.

В параграфе 3.1 рассматривается метрическое пространство слабо ограниченных отображений метрических пространств с метрикой Куратовского δ. Доказано, что пространство всех слабо ограниченных гомеоморфизмов $(HB(X), \delta)$, каждый из которых равномерно непрерывен на произвольном замкнутом шаре с центром в фиксированной точке метрического пространства X вместе со своим обратным гомеоморфизмом, является паратопологической группой, непрерывно действующей на пространстве X. Установлено, что $(HB(X), \delta)$ является топологической группой при связности произвольного замкнутого шара с центром в фиксированной точке метрического пространства X (теорема 3.1.2).

В параграфе 3.2 рассматриваются геодезические отображения специальных геодезических пространств. Исследованы некоторые геометрические свойства таких отображений. Теорема Банаха об обратном операторе и принцип равностепенной непрерывности для F-пространств [58, с. 99, 104] обобщены на случай специальных геодезических отображений специальных геодезических пространств (теоремы 3.2.1 – 3.2.5).

В параграфе 3.3 метрика Буземана δ_p распространяется на множество $\Phi(X, Y)$ всех непрерывных отображений

$$f : (X, \rho) \to (Y, d),$$

удовлетворяющих следующему условию: для любых x, $y \in X$

$$d(f(x), f(y)) \leq B_f e^{|xy|},$$

где B_f — неотрицательная константа. Доказано, что пространство $(H_B(X, Y, \alpha), \delta_p)$ всех отображений из метрического пространства X в метрическое пространство Y, удовлетворяющих равномерному условию Гельдера с фиксированными показателем $\alpha \in (0, 1]$ и коэффициентом $B \in \mathbb{R}_+$, является полным (собственным) метрическим пространством, если Y — полное метрическое пространство (X, Y — собственные метрические пространства) (теоремы 3.3.1, 3.3.3). Установлено, что если X — собственное метрическое пространство, то топология пространства $(H_B(X, Y, \alpha), \delta_p)$ совпадает как с топологией поточечной сходимости, так и с компактно-открытой топологией (теорема 3.3.2).

В параграфе 3.4 рассматривается метрическое пространство всех подобий $(Sim(X, Y), \delta_p)$ из метрического пространства X на метрическое пространство Y с метрикой Буземана δ_p. Доказано, что:

– если группа всех подобий действует транзитивно на полном метрическом пространстве, то и группа изометрий действует на нем транзитивно (лемма 3.4.1);

– если X, Y — полные (собственные) метрические пространства, то пространство $(Sim(X, Y) \cup Const(X, Y), \delta_p)$ — полное (собственное), где $Const(X, Y)$ — множество всех постоянных отображений из X в Y (теоремы 3.4.1, 3.4.3);

– если X — собственное метрическое пространство, то топология пространства $(Sim(X, Y) \cup Const(X, Y), \delta_p)$ совпадает как с топологией поточечной сходимости, так и с компактно-открытой топологией (теорема 3.4.2);

– $(Sim(X), \delta_p)$ — топологическая группа, действующая непрерывно на пространстве X (теорема 3.4.4);

– группы подобий $Sim(X)$ и изометрий $Iso(X)$ с метрикой Куратовского δ являются топологическими группами, непрерывно действующими на пространстве X.

Найдено замыкание группы подобий полного метрического пространства в пространстве $(\Phi(X, X), \delta_p)$ (теорема 3.4.5).

В параграфе 3.5 в специальном метрическом пространстве введены два аналога слабой сходимости последовательности в вещественном гильбертовом пространстве и исследованы их геометрические свойства (теоремы 3.5.1 – 3.5.4).

Основные результаты по перечисленным темам этой главы опубликованы в статьях автора (1, 2, 5, 12).

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в ведущих рецензируемых научных журналах, включенных в список ВАК

1. Сосов Е. Н. О метрическом пространстве слабо ограниченных отображений метрических пространств / Е. Н. Сосов // Изв. вузов. Математика. - 1993. - № 9. - С. 61-64. - 0,25 п.л.

2. Сосов Е. Н. О конечной компактности и полноте метрических пространств с метрикой Буземана / Е. Н. Сосов // Изв. вузов. Математика. - 1993. - № 11. - С. 62-68. - 0,44 п.л.

3. Сосов Е. Н. Об одном одуле в геометрии Гильберта / Е. Н. Сосов // Изв. вузов. Математика. - 1995. - № 5. - С. 78-82. - 0,31 п.л.

4. Сосов Е. Н. О выпуклых множествах в специальном метрическом пространстве / Е. Н. Сосов // Изв. вузов. Математика. - 1996. - № 3. - С. 77-79. - 0,19 п.л.

5. Сосов Е. Н. О геодезических отображениях специальных метрических пространств / Е. Н. Сосов // Изв. вузов. Математика. - 1997. - № 8. - С. 46-49. - 0,25 п.л.

6. Сосов Е. Н. О выпуклых множествах в обобщенном хордовом пространстве / Е. Н. Сосов // Изв. вузов. Математика. - 1998. - № 7. - С. 47-52. - 0,38 п.л.
7. Сосов Е. Н. Об аппроксимативных свойствах множеств в специальном метрическом пространстве / Е. Н. Сосов // Изв. вузов. Математика. - 1999. - № 6. - С. 81-84. - 0,25 п.л.
8. Сосов Е. Н. О наилучшей сети, наилучшем сечении и чебышевском центре ограниченного множества в бесконечномерном пространстве Лобачевского / Е. Н. Сосов // Изв. вузов. Математика. - 1999. - № 9. - С. 78-83. - 0,38 п.л.
9. Сосов Е. Н. О непрерывности и связности метрической δ-проекции в равномерно выпуклом геодезическом пространстве / Е. Н. Сосов // Изв. вузов. Математика. - 2001. - № 3. - С. 55-59. - 0,31 п.л.
10. Сосов Е. Н. О непрерывности метрической δ-проекции на выпуклое множество в специальном метрическом пространстве / Е. Н. Сосов // Изв. вузов. Математика. - 2002. - № 1. - С. 71-75. - 0,31 п.л.
11. Сосов Е. Н. О наилучших N-сетях ограниченных замкнутых выпуклых множеств в специальном метрическом пространстве / Е. Н. Сосов // Изв. вузов. Математика. - 2003. - № 9. - С. 42-45. - 0,25 п.л.
12. Сосов Е. Н. Об аналогах слабой сходимости в специальном метрическом пространстве / Е. Н. Сосов // Изв. вузов. Математика. - 2004. - № 5. - С. 69-73. - 0,31 п.л.
13. Сосов Е. Н. О метрическом пространстве всех 2-сетей пространства неположительной кривизны / Е. Н. Сосов // Изв. вузов. Математика. - 2004. - № 10. - С. 57-60. - 0,25 п.л.
14. Сосов Е. Н. Наилучшее приближение в метрике Хаусдорфа выпуклого компакта шаром / Е. Н. Сосов // Матем. заметки. - 2004. - Т. 76. - Вып. 2. - С. 226-236. - 0,69 п.л.
15. Сосов Е. Н. Касательное пространство по Буземану / Е. Н. Сосов // Изв. вузов. Математика. - 2005. - № 6. - С. 71-75. - 0,31 п.л.
16. Сосов Е. Н. Относительный чебышевский центр конечного множе-

ства геодезического пространства / Е. Н. Сосов // Изв. вузов. Математика. - 2008. - № 4. - С. 66-72. - 0,44 п.л.
17. Сосов Е. Н. Достаточные условия существования и единственности чебышевского центра непустого ограниченного множества геодезического пространства / Е. Н. Сосов // Изв. вузов. Математика. - 2010. - № 6. - С. 47-51. - 0,31 п.л.

Публикации в других изданиях

18. Sosov E. N. On existence and uniqueness of Chebyshev center of a bounded set in a special geodesic space / E. N. Sosov // Lobachevskii Journal of Mathematics. - 2000. - Vol. 7. - С. 43-46. - 0,25 п.л.
19. Сосов Е. Н. О существовании и единственности чебышевского центра ограниченного множества в специальном геодезическом пространстве / Е. Н. Сосов // Труды Матем. центра имени Н.И. Лобачевского. - Т. 5. Актуальные проблемы матем. и механики. Материалы Международной научной конференции (Казань, 1-3 октября 2000 г.). - Казань: "УНИПРЕСС ". - 2000. - С. 198-199. - 0,13 п.л.
20. Sosov E. N. On Hausdorff intrinsic metric / E. N. Sosov // Lobachevskii J. of Math. - 2001. - V. 8. - P. 185-189. - 0,31 п.л.
21. Сосов Е. Н. Пространство всех N-сетей и симметризованная степень порядка N метрического пространства / Е. Н. Сосов // Уч. зап. Казанск. ун-та. - 2009. - Т. 123. - Кн.10. - С. 21-30. - 0,63 п.л.

Литература

[1] Александров А. Д. Обобщенные римановы пространства / А. Д. Александров, В. Н. Берестовский, И. Г. Николаев // Успехи матем. наук. - 1986. - Т. 41, вып. 3. - С. 3-44.

[2] Amir D. Existence of Chebyshev centers, best n-nets and best compact approximants / D. Amir, J. Mach, K. Saatkamp // Transaction of the AMS. - 1982. - V. 271. - № 2. - P. 513-524.

[3] Amir D. Chebyshev centers and uniform convexity / D. Amir // Pacific J. Math. - 1978. - № 77. - P. 1-6.

[4] Andreev P. D. A. D. Alexandrov's problem for $CAT(0)$-spaces / P. D. Andreev // Sib. Math. J. - 2006. - V. 47. - № 1. - P. 3-24.

[5] Andreev P. D. Geometry of ideal boundaries of geodesic spaces with nonpositive curvature in Busemann sence / P. D. Andreev // Sib. Adv. Math. - 2008. V. 18. - № 2. - P. 95-102.

[6] Andreev P. D. Tits geometry of ideal boundaries of Busemann non-positively curved space/ P. D. Andreev // www.arXiv.org : 0802.4994v3 [math.MG].

[7] Andreev P. D. A. D. Alexandrov's problem for Busemann non-positively curved spaces / P. D. Andreev // www.arXiv.org : 0805.1539v1 [math.MG].

[8] Ballmann W. Lectures on Spaces of Nonpositive Curvature. GMV Seminar 25 / W. Ballmann. - Basel : Birkhauser Verlag, 1995. - 114 p.

[9] Balaganskii V. S. Some remarks on Chebyshev centers / V. S. Balaganskii // J. of Approximation theory. - 1997. - V. 89. - № 3. - P. 372-379.

[10] Белобров П. К. О чебышевской точке системы множеств / П. К. Белобров // Изв. вузов. Математика. - 1966. - № 6. - С. 18-24.

[11] Белобров П. К. К вопросу о чебышевском центре множества / П. К. Белобров // Изв. вузов. Математика. - 1964. - № 1. - С. 3-9.

[12] Берестовский В. Н. К проблеме конечномерности G-пространств Буземана / В. Н. Берестовский // Сиб. матем. журн. - 1977. - Т. 18. - № 1. - С. 210-221.

[13] Берестовский В. Н. Однородные G-пространства Буземана / В. Н. Берестовский // Сиб. матем. журн. - 1982. - Т. 23. - №. 2. - С. 3-15.

[14] Берестовский В. Н. О структуре однородных локально компактных пространств с внутренней метрикой / В. Н. Берестовский // Сиб. матем. журн. - 1989. - Т. 30. - №. 1. - С. 23-34.

[15] Берестовский В. Н. Многомерные обобщенные римановы пространства / В. Н. Берестовский, И. Г. Николаев // Совр. пробл. матем. Фунд. напр. - Т. 70 [Геометрия - 4]. - 1989. - С. 190-272.

[16] Берестовский В. Н. Основания геометрии однородных многообразий с внутренней метрикой / В. Н. Берестовский // Памяти Лобачевского посвящается. Вып. 1 : сб. ст. / Изд-во КГУ. - Казань, 1992. - С. 3-18.

[17] Берестовский В. Н. Пространства Буземана ограниченной сверху кривизны по Александрову / В. Н. Берестовский // Алгебра и анализ. - 2002. - Т. 14, вып. 5. - С. 3-18.

[18] Берестовский В. Н. Подобно однородные локально полные пространства с внутренней метрикой / В. Н. Берестовский // Изв. вузов. Математика. - 2004. - № 11. - С. 3-22.

[19] Bridson M. R. Metric spaces of non-positive curvature. Ser. A / M. R. Bridson, A. Haeffliger // Series of Comprehensive Stadies in Mathematics. - Berlin : Springer-Verlag. - 1999. - V. 319. - 643 p.

[20] Брудный Ю. А. Геометрические задачи наилучшего приближения: Учебн. пособие // Ю. А. Брудный, Е. А. Горин. - Ярославль : Изд. Ярославского гос. ун - та. - 1988. - 36 с.

[21] Busemann H. On spaces in which two points determine a geodesic / H. Busemann // Trans. Amer. Math. Soc. - 1943. - № 53. - P. 171-184.

[22] Буземан Г. Геометрия геодезических / Г. Буземан. - М. : Физматгиз, 1962. - 503 с.

[23] Busemann H. Recent Synthetic Differential Geometry / H. Busemann. - Berlin - Heidelberg - New York : Springer-Verlag, 1970. - 110 p.

[24] Busemann H. Spaces with Distinguished Geodesics / H. Busemann, B. B. Phadke. - New York - Basel - Marsel : Dekker Inc., 1987. - 159 p.

[25] Бураго Д. Ю. Курс метрической геометрии / Д. Ю. Бураго, Ю. Д. Бураго, С. В. Иванов. - Москва–Ижевск : Институт компьютерных иследований, 2004. - 496 с.

[26] Бураго Ю. Д. Введение в риманову геометрию / Ю. Д. Бураго, В. А. Залгаллер. - СПб. : Наука, 1994. - 318 с.

[27] Buyalo S. Elements of Asymptotic Geometry / S. Buyalo, V. Schroeder. - EMS Publishing House, 2007. - 200 p.

[28] Буяло С. В. Геодезические в пространствах Адамара / С. В. Буяло // Алгебра и анализ. - 1998. - Т. 10, вып. 2. - С. 93-123.

[29] Vesely L. Generalized centers of finite sets in Banach spaces / L. Vesely // Acta Math. Univ. Comenianae. - 1997. - V. 56. - № 1. - P. 83-115.

[30] Власов Л. П. Аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах / Л. П. Власов // Успехи матем. наук. - 1973. - Т. 28, вып. 6 (174). С. 3-66.

[31] Власов Л. П. Чебышевские множества и некоторые их обобщения / Л. П. Власов // Матем. заметки. - 1968. - Т. 3. - № 1. - С. 59-69.

[32] Гаркави А. Л. О наилучшей сети и наилучшем сечении множеств в нормированном пространстве / А. Л. Гаркави // Изв. АН СССР. Серия матем. - 1962. - Т. 26. - № 1. - С. 87-106.

[33] Гаркави А. Л. О чебышевском центре и выпуклой оболочке множества / А. Л. Гаркави // Успехи матем. наук. - 1964. - Т. 19, вып. 6. - С. 139-145.

[34] Gromov M. Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces / M. Gromov. - Boston : Birkhauser. Progress in Mathematics, 1999. - V. 152. - 578 p.

[35] Гундырев И. А. О подобно однородных локально-компактных пространствах с внутренней метрикой / И. А. Гундырев // Изв. вузов. Математика. - 2008. - № 4. - С. 28-42.

[36] Деза М. М. Геометрия разрезов и метрик / М. М. Деза, М. Лоран. - М. : МЦНМО, 2001. - 736 с.

[37] Deza M. M. Dictionary of Distances / M. M. Deza, E. Deza. - Elsevier Science, 2006. - 394 p.

[38] Дудов С. И. Равномерная оценка выпуклого компакта шаром произвольной нормы / С. И. Дудов, И. В. Златорунская // Матем. сб. - 2000. - Т. 191. - С. 13-38.

[39] Дудов С. И. Наилучшее приближение выпуклого компакта шаром произвольной нормы : свойства решения / С. И. Дудов, И. В. Златорунская // Теория функций, ее прилож. и смежные вопросы (Казань, 13-18 сентября 1999 г.). Казанское физ.-мат. общество. - 1999. - С. 88-90.

[40] Ефремович В. А. Геометрия близости / В. А. Ефремович, А. К. Толпыго. - М. : ФИМА, 2007. - 112 с.

[41] Иоффе А. Д. Метрическая регулярность и субдифференциальное исчисление / А. Д. Иоффе // Успехи матем. наук. - 2000. - Т. 55, вып. 3 (333). - С. 103-162.

[42] Кон-Фоссен С. Э. Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом / С. Э. Кон-Фоссен. - М. : Физматгиз, 1959. - 304 с.

[43] Krakus B. Any 3-dimensional G-space is a Manifold / B. Krakus // Bull Acad. Pol. Sci. - 1968. - V. 16. - № 9. - P. 737-740.

[44] Куратовский К. Топология / К. Куратовский. - М. : Мир, 1966. - Т. 1. - 594 с.

[45] Лисковец О. А. Некорректные задачи и устойчивость квазирешений / О. А. Лисковец // Сиб. матем. журн. - 1969. - Т. 10. - № 2. - С. 373-385.

[46] Лисковец О. А. Вариационные методы решения неустойчивых задач / О. А. Лисковец. - Минск : Наука и техника, 1981. - 343 с.

[47] Lytchak A. Differentiation in metric spaces / A. Lytchak // Алгебра и анализ. - 2004. - Т. 16, вып. 6. - С. 128-161.

[48] Маринов А. В. Устойчивость ε-квазирешений операторных уравнений 1 рода // Приближение функций полиномами и сплайнами : Сб. статей АН СССР. УНЦ. / А. В. Маринов - Свердловск : УНЦ АН СССР. - 1985. - С. 105-117.

[49] Маринов А. В. Непрерывность и связность метрической δ-проекции / А. В. Маринов // АН СССР. Ур. НЦ. Аппроксимация в конкретных и абстрактных банаховых пространствах. - 1987. - С. 82-95.

[50] Маринов А. В. Оценки устойчивости метрической ε-проекции через модуль выпуклости пространства / А. В. Маринов // Труды института матем. и мех. УрО РАН. - 1992. - Т. 2. - С. 85-109.

[51] Nadler S. B., Jr. Hyperspases of sets / S. B. Nadler, Jr. - New York. Basel. Marsel : Dekker. - 1978. - 707 с.

[52] Narang T. D. Simultaneous approximanions and Chebyshev centres in metric spaces / T. D. Narang // Математички Весник. - 1999. - № 51. - С. 61-68.

[53] Papadopoulos A. Metric spaces convexity and nonpositive curvature / A. Papadopoulos. - Zurich : European Math. Society, 2005. - 287 p.

[54] Погорелов А. В. Внешняя геометрия выпуклых поверхностей / А. В. Погорелов. - М. : Наука, 1969. - 760 с.

[55] Погорелов А. В. Четвертая проблема Гильберта / А. В. Погорелов. - М. : Наука. - 1974. - 79 с.

[56] Половинкин Е. С. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа / Е. С. Половинкин, М. В. Балашов. - М. : Физматлит, 2004. - 416 с.

[57] Решетняк Ю. Г. Двумерные многообразия ограниченной кривизны / Ю. Г. Решетняк // Совр. пробл. матем. Фунд. напр. - Т. 70 [Геометрия - 4]. - 1989. - С. 5-189.

[58] Садовничий В. А. Теория операторов. Изд. 2 / В. А. Садовничий. - М. : Изд. Московского ун-та, 1986. - 386 с.

[59] Сендов Б. Хаусдорфовые приближения / Б. Сендов. - София : Изд. Болгарской академии наук, 1979. - 372 с.

[60] Singer I. Some remarks on approximative compactness / I. Singer // Rev. roum. math. pures et appl. - 1964. - V. 9. - P. 167-177.

[61] Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений / В. М. Тихомиров. - М. : Изд-во Московского ун-та, 1976. - 304 с.

[62] Thurston P. 4-dimensional Busemann G-spaces are 4-manifolds / P. Thurston // Differential Geometry and its Applications. - 1996. - V. 6. - № 3. - P. 245-270.

[63] Wisnicki A. On relative Hausdorff measures of noncompactness and relative Chebyshev radii in Banach spaces / A. Wisnicki, J. Wosko // Proceedings of the AMS. - 1996. - V. 124. - № 8. - P. 2465-2474.

[64] Федерер Г. Геометрическая теория меры / Г. Федерер. - М.: Наука, 1987. - 780 с.